Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 28

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de noviembre de 2019

1. Demostrar que $a\psi = c \Longrightarrow c = 0$

Supongamos la función

$$\psi(x) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{1}$$

Donde la función erfi(x) se define como

$$\mathrm{erfi}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Es decir que cumple

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{erfi}\,(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \text{ y } \mathrm{erfi}\,(0) = 0 \tag{3}$$

Vamos a ver cuanto vale $a\psi(x)$

$$a\psi(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sqrt{\pi}\left(\frac{2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}e^{\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)^2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} + \mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\right) \tag{5}$$

$$= \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} - x\frac{m\omega}{\hbar}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\right) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} - x\frac{m\omega}{\hbar}\psi \tag{6}$$

$$a\psi(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\psi + \frac{\hbar}{m\omega}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} - x\psi\right) = 1 \neq 0 \tag{7}$$

Ahora falta demostrar que $\psi(x) \in L^2_{\mathbb{R}}$. Una condición suficiente para la convergencia es que $\psi(x)$ tienda a 0 en el infinito[1]. Para demostrar este límite usemos la regla de Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \sqrt{\pi}\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)}{e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\pi}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}} \tag{8}$$

$$= \sqrt{\pi}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar\pi}}e^{\left(\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)}}{\frac{m\omega x}{\hbar}e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \tag{9}$$

Usando la regla de Hôpital deducimos entonces que $\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0$. Se demuestra fácilmente que si $\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty}\psi'(x) = 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\psi'(x) = \lim_{x\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \tag{10}$$

El cambio de limites no es cierto en general, pero se puede demostrar que, para nuestra función, se puede hacer[2]. Podemos ahora reescribir este límite, usando (6), como

$$0 = \lim_{x\to\infty}\psi'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} - x\frac{m\omega}{\hbar}\psi\right) \implies \lim_{x\to\infty} x\psi(x) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \neq \infty \tag{11}$$

Finalmente, elevando al cuadrado

$$\lim_{x\to\infty} x^2\psi^2(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi^2(x)}{\frac{1}{x^2}} \neq \infty \tag{12}$$

Podemos usar ahora un teorema de convergencia que nos afirma que si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \neq \infty$ entonces

$$\int^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \implies \int^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \tag{13}$$

Dado que sabemos que la integral $\int^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, podemos afirmar que

$$\int \psi(x)^2\,\mathrm{d}x \ \text{ es convergente} \tag{14}$$

[1] Es importante recordar que esta condición en general es necesaria pero no suficiente, pero este caso es especial.

[2] Pues nuestra función cumple las condiciones del teorema de Moore-Osgood.

De hecho, un análisis más profundo demuestra que la integral converge al valor $\frac{\sqrt{\pi^3}}{2}$. Entonces hemos encontrado un contraejemplo que demuestra que la proposición que queríamos demostrar es falsa.

2. Calcular $|0\rangle$

Queremos resolver la ecuación diferencial

$$x\psi_0(x) + \frac{\hbar}{m\omega}\psi_0'(x) = 0 \Longrightarrow \psi_0'(x) + \frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x) = 0 \tag{15}$$

Vamos a resolver esta ecuación, en general, para cualquier función de este tipo el factor

$$e^{\int \frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x} = e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{16}$$

es un factor integrando, es decir:

$$0 = e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\psi_0' + \frac{m\omega}{\hbar}xe^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\psi_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\psi_0\right) \tag{17}$$

Por lo que obtenemos la solución

$$e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\psi_0 = k \Longrightarrow \psi_0 = ke^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{18}$$

Finalmente queremos normalizar la función a 1, así que

$$|k|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x = 1 \Longrightarrow |k| = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}} \tag{19}$$

Para calcular la integral Gaussiana usaremos un truco típico, usando simetría podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\,\mathrm{d}x \overset{y=x^2}{=} \int_{0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{m\omega y}{\hbar}}\,\mathrm{d}y = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} \tag{20}$$

Donde he usado que

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} \tag{21}$$

Sustituyendo el valor de $|k|$, obtenemos

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{i\alpha}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{22}$$

Dado que $e^{i\alpha}$ es una fase global, tenemos la libertad de escoger $\alpha = 0$, quedando

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{23}$$

3. Resolver $a\psi = c$.

Queremos resolver la ecuación $a\psi = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\psi + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = c$. Dado que c es una constante arbitraria podemos reescribir el problema como

$$x\psi + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x} = c \tag{24}$$

donde c ahora es otra constante (también arbitraria). Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea, cuya solución se puede calcular como $\psi = \psi_0 + \psi_c$, donde ψ_0 es la solución general para el caso $c = 0$ y ψ_c es una solución particular para $c \neq 0$. En la anterior sección hemos visto que, para $c = 0$ la solución general es

$$\psi_0(x) = \alpha e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{25}$$

Donde α es una constante arbitraria ($\alpha \in \mathbb{C}$) Por otra parte, en la sección 1 vimos que

$$\psi(x) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{26}$$

es una solución particular para $c = 1$. Es evidente que, si multiplicamos la función ψ por una constante β, entonces la función $\psi' = \beta\psi$ es solución de la ecuación

$$x\psi' + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial\psi'}{\partial x} = \beta c \tag{27}$$

Por lo que si multiplicamos la solución de la sección 1 por una constante arbitraria c, entonces tenemos la solución particular que deseamos para cualquier valor de c:

$$\psi_c = c\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{28}$$

Por lo que la solución general a la ecuación (24) es

$$\psi(x) = \left(c\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\right) + \alpha\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{29}$$

4. Demostración que $a\left|0\right\rangle = 0$

Puede parecer que el ejercicio anterior entra en contradicción con lo expuesto por Javier en el capítulo 28, pero si bien es verdad que, como hemos demostrado la ecuación

$a\psi = c$ no implica que $c = 0$, debemos recordad cuál es el objetivo de éste calculo, en el minuto 24:00 del capítulo 28 se plantea ese ejercicio en dos partes. La primera es demostrar que $a\psi = c \implies c = 0$ mientras que la segunda es calcular la función que cumple $a\psi = 0$. Eso Javier plantea demostrarlo para ψ funciones arbitrarias, pero el objetivo real de este ejercicio dentro del capítulo, es demostrar que $a\left|0\right\rangle = 0$. Por lo que podemos preguntarnos, que pasa si, en lugar de la ecuación $a\psi = c$, intentamos resolver $a\left|0\right\rangle = c$? La solución general de la ecuación $a\psi = c$ la hemos encontrado en la sección anterior, pero que pasa si ahora imponemos que sea un estado propio del operador $a^\dagger a$?

$$a^\dagger a\psi = a^\dagger c = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}xc = \lambda\psi \tag{30}$$

Por la forma de la función ψ en (29) la única posibilidad para que se cumpla esta ecuación es, ahora sí, que $c = 0$.

Como complemento, existe otro camino para demostrar que $a\left|0\right\rangle = 0$, sin recurrir a ecuaciones diferenciales, en efecto, recordemos que $\left|0\right\rangle$ es, por definición, el estado propio de H con energía más baja. Por otra parte, recordemos que $[H, a] = -\hbar\omega a$, por lo que si definimos $\left|-1\right\rangle \equiv a\left|0\right\rangle$

$$[H, a]\left|0\right\rangle = -\hbar\omega a\left|0\right\rangle \implies H\left|-1\right\rangle - aE_0\left|0\right\rangle = -\hbar\omega\left|-1\right\rangle \tag{31}$$

$$\implies H\left|-1\right\rangle = (E_0 - \hbar\omega)\left|-1\right\rangle \tag{32}$$

Por lo tanto $\left|-1\right\rangle$ es un estado propio de H con energía $E_0 - \hbar\omega < E_0$, esto contradice nuestra hipótesis, entonces claramente algo está mal, o bien $\left|0\right\rangle$ no puede ser el estado de mínima energía, lo que significa que no existe ningún estado con mínima energía, o bien $\left|-1\right\rangle$ no es un estado propio y algo hemos hecho mal. Según la Wikipedia, la definición de estado propio es:

> En álgebra lineal, los vectores propios o autovectores de un operador lineal son los vectores **no nulos** que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección.

Fijémonos que hay un pequeño detalle que puede salvar toda esta contradicción, la única forma de imponer que exista un estado de mínima energía es imponer que $\left|-1\right\rangle$ no sea un estado propio de H, pero esto solo es posible si, como queríamos, $\left|-1\right\rangle = a\left|0\right\rangle = 0$.

5. Calcular la normalización de $|n\rangle$

Javier ha demostrado que, los estados

$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle , \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2 |0\rangle \tag{33}$$

están normalizados, usemos ahora la hipótesis que el estado

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle \tag{34}$$

está normalizado, esto es cierto para $n = 1$ y $n = 2$, así que supongamos que es cierto para $n = k$, entonces normalicemos el estado

$$|k+1\rangle = (a^\dagger)^{k+1} |0\rangle \tag{35}$$

Usando que $\left[N, (a^\dagger)^k\right] = k(a^\dagger)^k$ y que por hipótesis $\langle 0| a^k (a^\dagger)^k |0\rangle = k!$

$$\begin{aligned}
\langle k+1|k+1\rangle &= \langle 0| a^{k+1}(a^\dagger)^{k+1} |0\rangle = \langle 0| a^k \,(N+1)\,(a^\dagger)^k |0\rangle && (36)\\
&= \langle 0| a^k N(a^\dagger)^k |0\rangle + \langle 0| a^k (a^\dagger)^k |0\rangle && (37)\\
&= \langle 0| a^k (a^\dagger)^k N |0\rangle + k \langle 0| a^k (a^\dagger)^k |0\rangle + \langle 0| a^k (a^\dagger)^k |0\rangle && (38)\\
&= (k+1)\, k! = (k+1)! && (39)
\end{aligned}$$

Demostrando así la hipótesis de inducción.